DOI: https://doi.org/10.5281/zenodo.14325492

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДЛЯ БИГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ТРЕХМЕРНОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ R^3.

Ашурова Зебинисо Рахимовна
Узбекистан.Уз-Фин.ПИ (Uzbek-Finnish pedago gical institute), доц. кафедры «Математика», доц. каф. Математический анализ, СамГУ им. Ш.Рашидова кан. физ-мат наук, zeb1957niso@gmail.com.

Жураева Умидахон Юнусалиевна
Узбекистан, Самарканд, докторант кафедры «Дифферанциальные уравнение» СамГУ им. Ш.Рашидова, umida_9202@mail.ru.

Азимова Маҳлиё Аъзамовна
Уз-Фин.ПИ (Uzbek-Finnish pedagogical institute), студент 3 курса факультета «Aniq va amaliy fanlar».

***Аннотация**: В данной работы строится функция Карлемана для полигармонических функций второго порядка (т.е. для бигармонических функций), определенных в области $D \subset R^3, D = \{y = (y_1, y_2 y_3): y_3 > 0\}$.*

***Ключевые слово:** гармонические функции, бигармонические функции, интегральное представление.*

***Abstract:** In this work, the Carleman function is constructed for second-order polyharmonic functions (i.e., for biharmonic functions) defined in the domain $D \subset R^3, D = \{y = (y_1, y_2 y_3): y_3 > 0\}$.*

***Key words:** harmonic functions, biharmonic functions, integral representation.*

***Аннотация:** Бу ишда $D \subset R^3, D = \{y = (y_1, y_2 y_3): y_3 > 0\}$ сохада аникланган иккинчи тартибли полигармоник функциялар учун Карлеман функцияси ўрганилган.*

***Калит сўзлар:** гармоник функциялар, бигармоник функциялар, Карлеман функцияси, интеграл тасвир.*

Е.М.Ландис поставил задачу в виде:

Пусть в цилиндре $0 \leq \sum_{k=0}^{n-1} x_l^2 < 1$ расположена область, уходящая в бесконечность (в одну или в оба стороны – все равно) в граница Г этой области как угодно гладка. Пусть в области определено решение и уравнение $\Delta\Delta u = 0$ как угодно гладкое вплоть до границы и $u|_\Gamma = 0$, $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\Gamma = 0$. Следует ли отсюда, что неограниченно (экспоненциально растет при уходе на бесконечность).

Для того чтобы решить эту задачу используем, решая задачу о продолжении бигармонической функции во внутрь области, когда на границе области задаются значения лапласианов этой функции до $(n-1)$– го порядка, а также нормальная производная от этих лапласианов и получим оценки роста этой функции.

В данной работы исследуется свойство функция Карлемана для полигармонических функций второго порядка (т.е. для бигармонических функций), определенных в области $D \subset R^3$, $\boldsymbol{D = \{y = (y_1, y_2 y_3): y_3 > 0\}}$.

В данной работы строится функция Карлемана для полигармонических функций второго порядка (т.е. для бигармонических функций), определенных в области $D \subset R^3$, $\boldsymbol{D = \{y = (y_1, y_2 y_3): y_3 > 0\}}$.

Функции $\phi_\sigma(y,x)$ при $s > 0, \sigma \geq 0$ определим следующими равенствами:

$$\varphi_\sigma(y,x) = c_0 \int_0^\infty Im \frac{1}{(y_3 - x_3 + i\sqrt{u^2+\alpha^2})(y_3 + x_3 + i\sqrt{u^2+\alpha^2})^2 \, exp(\sigma(\omega+1)^{\rho_1})} \frac{du}{\sqrt{u^2+\alpha^2}}$$

(1)

где $\omega = i\sqrt{u^2+s} + y_3, \sigma > 0, y_3 > 0, 0 < \rho_1 < 1, c_0 = \frac{8\pi x_3{}^2}{exp(\sigma(x_3+1)^{\rho_1})}$.

Лемма 1. Функция $\varphi_\sigma(y,x)$, определенная формулой (1) имеет вид $\alpha > 0$

$$\varphi_\sigma(y,x) = -c_0 \int_0^\infty \frac{[(y_3 - x_3)((y_3+x_3)^2 - \eta^2) - 2(y_3+x_3)\eta^2] sin(\sigma\lambda)}{(u^2+r^2)(u^2+r_1{}^2)^2 \, exp(\sigma A_1)} \frac{du}{\sqrt{u^2+s}} -$$

$$-c_0 \int_0^\infty \frac{[((y_3+x_3)^2 - \eta^2) + 2(y_3 - x_3)(y_3+x_3)] \, cos(\sigma\lambda)}{(u^2+r^2)(u^2+r_1{}^2)^2 \, exp(\sigma A_1)} du.$$

$A_1 = |(y_3+1)^2 + u^2 + s|^{\frac{\rho_1}{2}} cos\, \sigma\, \rho_1 arctg \frac{\sqrt{u^2+s}}{(y_2+1)}$, $\lambda = |(y_3+1)^2 + u^2 + s|^{\frac{\rho_1}{2}} sin\, \sigma\, \rho_1 arctg \frac{\sqrt{u^2+s}}{(y_2+1)}$

Доказательство. При вычисления мнимой части подинтегралной функции использовав

$$exp\,\sigma\left((y_3+1)+i\sqrt{u^2+s}\right)^{\rho_1}$$

$$=exp\left\{\sigma\left|(y_3+1)+i\sqrt{u^2+s}\right|^{\rho_1}exp\,i\,\sigma\left(\rho_1 arctg\frac{\sqrt{u^2+s}}{(y_3+1)}\right)\right\}=$$

$$=exp\left(\quad\sigma\left|(y_3+1)+i\sqrt{u^2+s}\right|^{\rho_1}\left(cos\,\sigma\left(\rho_1 arctg\frac{\sqrt{u^2+s}}{(y_3+1)}\right)\right.\right.$$

$$\left.\left.+\,i\,sin\,\sigma\left(\rho_1 arctg\frac{\sqrt{u^2+s}}{(y_3+1)}\right)\right)\right)=$$

$$=exp\,\sigma\left(\left|(y_3+1)+i\sqrt{u^2+s}\right|^{\rho_1}cos\,\sigma\,\rho_1 arctg\frac{\sqrt{u^2+s}}{(y_3+1)}\right)exp\,i\left(\left|(y_3+1)+\right.\right.$$

$$\left.\left.i\sqrt{u^2+s}\right|^{\rho_1}sin\,\sigma\left(\rho_1 arctg\frac{\sqrt{u^2+s}}{(y_3+1)}\right)\right)$$

и так как $cos\,\sigma\left(\rho_1 arctg\frac{\sqrt{u^2+s}}{(y_3+1)}\right)\geq\delta_0>0$

поэтому если обозначать $\lambda=|(y_3+1)^2+u^2+s|^{\frac{\rho_1}{2}}sin\,\sigma\left(\rho_1 arctg\frac{\sqrt{u^2+s}}{(y_2+1)}\right)$

$A_1=|(y_3+1)^2+u^2+s|^{\frac{\rho_1}{2}}cos\,\sigma\,\rho_1 arctg\frac{\sqrt{u^2+s}}{(y_2+1)}$ $c_0=\frac{8\pi x_3{}^2}{exp(\sigma(x_3+1)^{\rho_1})}$ тогда

$$\varphi_\sigma(y,x)$$
$$=c_0\int_0^\infty Im\frac{\left(y_3-x_3-i\sqrt{u^2+s}\right)\left(y_3+x_3-i\sqrt{u^2+s}\right)^2\left(cos(\sigma\lambda)-isin(\sigma\lambda)\right)}{\left|y_3-x_3+i\sqrt{u^2+s}\right|\left|y_3+x_3+i\sqrt{u^2+s}\right|^2|exp(\sigma(\omega+1)^{\rho_1})|}\frac{du}{\sqrt{u^2+s}}$$

$$\varphi_\sigma(y,x)$$
$$=c_0\int_0^\infty Im\frac{(y_3-x_3-i\eta)((y_3+x_3)^2-\eta^2-2i(y_3+x_3)\eta)\left(cos(\sigma\lambda)-isin(\sigma\lambda)\right)}{(u^2+r^2)(u^2+r_1{}^2)^2\,exp(\sigma A_1)}\frac{du}{\sqrt{u^2+s}}=$$

$$=c_0\int_0^\infty Im\frac{([(y_3-x_3)((y_3+x_3)^2-\eta^2)-2(y_3+x_3)\eta^2]-i\eta[((y_3+x_3)^2-\eta^2)+2(y_3-x_3)(y_3+x_3)])}{\left(cos(\sigma\lambda)-isin(\sigma\lambda)\right)^{-1}(u^2+r^2)(u^2+r_1{}^2)^2\,exp(\sigma A_1)}$$

этот в свою очередь утверждение леммы.

Лемма 2. Для $\phi_\sigma(y,x)$ гармоническая функция в R^3 то справедливо равенство $\Delta r^2\phi_\sigma(y,x)=\phi_{\sigma,1}(y,x)$, где

$$\phi_{\sigma,1}(y,x) = 4\phi_\sigma(y,x) + 4\left((y_1 - x_1)\frac{\partial\phi_\sigma(y,x)}{\partial y_1} + (y_2 - x_2)\frac{\partial\phi_\sigma(y,x)}{\partial y_2} + (y_3 - x_3)\frac{\partial\phi_\sigma(y,x)}{\partial y_3}\right)$$

функция тоже является гармонической функцией в R^2 по переменному y включая и точку x.

Доказательство: $\frac{\partial r^2\phi_\sigma(y,x)}{\partial y_1} = \phi_\sigma(y,x)\frac{\partial r^2}{\partial y_1} + r^2\frac{\partial\phi_\sigma(y,x)}{\partial y_1}$,

$$\frac{\partial^2 r^2\phi_\sigma(y,x)}{\partial {y_1}^2} = \phi_\sigma(y,x)\frac{\partial^2 r^2}{\partial {y_1}^2} + 2\frac{\partial r^2}{\partial y_1}\frac{\partial\phi_\sigma(y,x)}{\partial y_1} + r^2\frac{\partial^2\phi_\sigma(y,x)}{\partial {y_1}^2},$$

$$\Delta r^2\phi_\sigma(y,x) = \phi_\sigma(y,x)\left(\frac{\partial^2 r^2}{\partial {y_1}^2} + \frac{\partial^2 r^2}{\partial {y_2}^2} + \frac{\partial^2 r^2}{\partial {y_3}^2}\right) +$$
$$+2\left(\frac{\partial r^2}{\partial y_1}\frac{\partial\phi_\sigma(y,x)}{\partial y_1} + \frac{\partial r^2}{\partial y_2}\frac{\partial\phi_\sigma(y,x)}{\partial y_2} + \frac{\partial r^2}{\partial y_3}\frac{\partial\phi_\sigma(y,x)}{\partial y_3}\right) +$$
$$+r^2\left(\frac{\partial^2\phi_\sigma(y,x)}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2\phi_\sigma(y,x)}{\partial y_2^2} + \frac{\partial^2\phi_\sigma(y,x)}{\partial y_3^2}\right)$$

так как $\phi_\sigma(y,x)$ гармоническая функция в R^3 если $\phi_{\sigma,1}(y,x) = 4\phi_\sigma(y,x) + 4\left((y_1 - x_1)\frac{\partial\phi_\sigma(y,x)}{\partial y_1} + (y_2 - x_2)\frac{\partial\phi_\sigma(y,x)}{\partial y_2} + (y_3 - x_3)\frac{\partial\phi_\sigma(y,x)}{\partial y_3}\right)$

$\frac{\partial\phi_{\sigma,1}(y,x)}{\partial y_1} = 4\frac{\partial\phi_\sigma(y,x)}{\partial y_1} + 4\frac{\partial}{\partial y_1}\left((y_1 - x_1)\frac{\partial\phi_\sigma(y,x)}{\partial y_1} + (y_2 - x_2)\frac{\partial\phi_\sigma(y,x)}{\partial y_2} + (y_3 - x_3)\frac{\partial\phi_\sigma(y,x)}{\partial y_3}\right)$ тогда

$$\frac{\partial\phi_{\sigma,1}(y,x)}{\partial y_1} = 8\frac{\partial\phi_\sigma(y,x)}{\partial y_1} + 4\left((y_1 - x_1)\frac{\partial^2\phi_\sigma(y,x)}{\partial {y_1}^2} + (y_2 - x_2)\frac{\partial^2\phi_\sigma(y,x)}{\partial y_1\partial y_2} + (y_3 - x_3)\frac{\partial^2\phi_\sigma(y,x)}{\partial y_1\partial y_3}\right)$$

$$\frac{\partial^2\phi_{\sigma,1}(y,x)}{\partial {y_1}^2} = 8\frac{\partial^2\phi_\sigma(y,x)}{\partial {y_1}^2} + 4\frac{\partial}{\partial y_1}\left((y_1-\mathrm{x}_1)\frac{\partial^2\phi_\sigma(y,x)}{\partial {y_1}^2} + (y_2-x_2)\frac{\partial^2\phi_\sigma(y,x)}{\partial y_1\partial y_2} + (y_3-\mathrm{x}_3)\frac{\partial^2\phi_\sigma(y,x)}{\partial y_1\partial y_3}\right) =$$

$$= 12\frac{\partial^2\phi_\sigma(y,x)}{\partial {y_1}^2} + 4\left((y_1-x_1)\frac{\partial^3\phi_\sigma(y,x)}{\partial {y_1}^3} + (y_2-x_2)\frac{\partial^3\phi_\sigma(y,x)}{\partial {y^2}_1\partial y_2} + (y_3-\mathrm{x}_3)\frac{\partial^2\phi_\sigma(y,x)}{\partial {y^2}_1\partial y_3}\right)$$

так как $\phi_\sigma(y,x)$ гармоническая функция R^2 отсюда следует утверждение леммы.

Следствие . Если $\phi_\sigma(y,x)$ гармоническая функция в R^2 по переменной y включая и точку x, то справедливо равенство $\Delta^s r^2\phi_\sigma(y,x) = r^2\Delta^s\phi_\sigma(y,x) + 4sr\frac{\partial}{\partial r}\Delta^{s-1}\phi_\sigma(y,x) + 2s(2s+n-2)\Delta^{s-1}\phi_\sigma(y,x)$,

Теорема-1. Функция $\varphi_\sigma(y,x)$, определенная формулой (1) справедлива оценка $|\varphi_\sigma| \le \frac{c_0}{\alpha {r_1}^2\, exp(\sigma A)}$

Доказательство. Действительно, так как

$$\varphi_\sigma(y,x) = c_0\int_0^\infty Im\frac{K(\omega)}{(y_3-x_3+i\sqrt{u^2+\alpha^2})}\frac{du}{\sqrt{u^2+\alpha^2}} =$$

$$= c_0\int_0^\infty Im\frac{1}{(y_3-x_3+i\sqrt{u^2+\alpha^2})\left(y_3+x_3+i\sqrt{u^2+\alpha^2}\right)^2 exp(\sigma(\omega+1)^{\rho_1})}\frac{du}{\sqrt{u^2+\alpha^2}}$$

Кроме того

$$exp\left((y_3+1)+i\sqrt{u^2+s}\right)^{\rho_1} =$$

$$= exp\,\sigma\left(\left|(y_3+1)+i\sqrt{u^2+s}\right|^{\frac{\rho_1}{2}} cos\,\sigma\,\rho_1 arcctg\frac{\sqrt{u^2+s}}{(y_3+1)}\right) exp\,i\left(\left|(y_3+1)+i\sqrt{u^2+s}\right|^{\frac{\rho_1}{2}} sin\,\sigma\,\rho_1 arcctg\frac{\sqrt{u^2+s}}{(y_3+1)}\right)$$

Тогда так, как $-\pi < arg\,\omega < \pi$, $cos\,\sigma\,\rho_1 arcctg\frac{\sqrt{u^2+s}}{(y_3+1)} \ge \delta_0 > 0$

Поэтому если обозначать $\eta = \sqrt{u^2 + \alpha^2}, \lambda = ((y_3 + 1)^2 + u^2 + s)^{\frac{\rho_1}{2}} \sin\sigma\,\rho_1 arcctg\frac{\sqrt{u^2+s}}{(y_2+1)}$

$$A_1 = |(y_3 + 1)^2 + u^2 + s|^{\frac{\rho_1}{2}} \cos\sigma\,\rho_1 arcctg\frac{\sqrt{u^2+s}}{(y_2+1)} \quad c_0 = \frac{8\pi {x_3}^2}{exp(\sigma(x_3+1)^{\rho_1})}$$ тогда

$$\varphi_\sigma(y,x) = -c_0\int_0^\infty \frac{[(y_3 - x_3)((y_3 + x_3)^2 - \eta^2) - 2(y_3 + x_3)\eta^2]\cos\sigma\lambda}{(u^2 + r^2)(u^2 + {r_1}^2)^2\, exp\{\sigma A_1\}}\frac{du}{\eta} -$$

$$-c_0\int_0^\infty \frac{[((y_3+x_3)^2-\eta^2)+2(y_3-x_3)(y_3+x_3)]}{(u^2+r^2)(u^2+{r_1}^2)^2\, exp\{\sigma A_1\}}\frac{\sin\sigma\lambda \quad du}{}$$

для $\varphi_\sigma = \phi_1 + \phi_2$ где

$$\phi_1 = -c_0\int_0^\infty \frac{[(y_3 - x_3)((y_3 + x_3)^2 - \eta^2) - 2(y_3 + x_3)\eta^2]\cos\sigma\lambda}{(u^2 + r^2)(u^2 + {r_1}^2)^2\, exp\{\sigma A_1\}}\frac{du}{\eta}$$

$$\phi_2 = -c_0\int_0^\infty \frac{[((y_3 + x_3)^2 - \eta^2) + 2(y_3 - x_3)(y_3 + x_3)]}{(u^2 + r^2)(u^2 + {r_1}^2)^2\, exp\{\sigma A_1\}}\frac{\sin\sigma\lambda \quad du}{}$$

$$\phi_1 = A_1 + A_2$$

$$A_1 = -c_0\int_0^\infty \frac{(y_3 - x_3)((y_3 + x_3)^2 - \eta^2)\cos\sigma\lambda}{(u^2 + r^2)(u^2 + {r_1}^2)^2\, exp\{\sigma A_1\}}\frac{du}{\eta} \quad ,$$

$$A_2 = c_0\int_0^\infty \frac{(y_3 + x_3)\eta^2\cos\sigma\lambda}{(u^2 + r^2)(u^2 + {r_1}^2)^2\, exp\{\sigma A_1\}}\frac{du}{\eta}$$

$$|A_1| \le \left|\int_0^\infty \frac{\cos\sigma\lambda}{\sqrt{u^2 + s}\, exp(\sigma A_1)}\frac{(y_3 + x_3)^2}{(u^2 + {r_1}^2)^2}\frac{(y_3 - x_3)du}{u^2 + r^2}\right|$$

$$+\left|\int_0^\infty \frac{\cos\sigma\lambda}{\sqrt{u^2 + s}\, exp(\sigma A_1)}\frac{(u^2 + s)}{(u^2 + {r_1}^2)^2}\frac{(y_3 - x_3)du}{u^2 + r^2}\right| \le \frac{c_0}{\alpha {r_1}^2\, exp(\sigma A)}$$

$$|A_2| \le \left|c_0\int_0^\infty \frac{\cos\sigma\lambda}{(u^2 + {r_1}^2)\exp\{\sigma A_1\}}\frac{\sqrt{u^2 + s}}{(u^2 + r^2)}\frac{(y_3 + x_3)du}{(u^2 + {r_1}^2)}\right| \le \frac{c_0}{\alpha {r_1}^2 \exp(\sigma A)}\frac{c_0}{\alpha {r_1}^2\, exp(\sigma A)}$$

$$\phi_2 = A_3 + A_4$$

$$A_3 = -c_0\int_0^\infty \frac{((y_3 + x_3)^2 - \eta^2)\sin\sigma\lambda \quad du}{(u^2 + r^2)(u^2 + {r_1}^2)^2\, exp\{\sigma A_1\}}, \qquad A_4$$

$$= -c_0\int_0^\infty \frac{2(y_3 - x_3)(y_3 + x_3)\sin\sigma\lambda \quad du}{(u^2 + r^2)(u^2 + {r_1}^2)^2\, exp\{\sigma A_1\}}$$

$$|A_3| \leq \left| -c_0 \int_0^\infty \frac{((y_3+x_3)^2-\eta^2)\sin\lambda \quad du}{(u^2+r^2)(u^2+{r_1}^2)^2\, exp\{\sigma A_1\}} \right| \leq$$

$$\leq \left| -c_0 \int_0^\infty \frac{(y_3+x_3)^2}{(u^2+{r_1}^2)^2} \frac{\sin\lambda}{exp\{\sigma A_1\}} \frac{du}{(u^2+r^2)} \right|$$

$$+ \left| -c_0 \int_0^\infty \frac{\sin\lambda}{exp\{\sigma A_1\}} \frac{\eta^2}{(u^2+{r_1}^2)^2} \frac{du}{(u^2+r^2)} \right| \leq \frac{c_0}{r{r_1}^2\, exp(\sigma A)}$$

$$|A_4| \leq \left| -c_0 \int_0^\infty \frac{2(y_3-x_3)(y_3+x_3)\sin\sigma\lambda \quad du}{(u^2+r^2)(u^2+{r_1}^2)^2\, exp\{\sigma A_1\}} \right| \leq$$

$$\leq \left| -c_0 \int_0^\infty \frac{(y_3+x_3)\sin\lambda}{(u^2+{r_1}^2)^2\, exp\{\sigma A_1\}} \frac{2(y_3-x_3) \quad du}{(u^2+r^2)} \right| \leq \frac{c_0}{{r_1}^3\, exp(\sigma A)}$$

поэтому

$$|\phi_\sigma| \leq \frac{c_0}{\alpha {r_1}^2\, exp(\sigma A)} + \frac{c_0}{\alpha {r_1}^2\, exp(\sigma A)} + \frac{c_0}{r {r_1}^2\, exp(\sigma A)} + \frac{c_0}{{r_1}^3\, exp(\sigma A)} \leq$$

$$\leq \frac{c_0}{\alpha {r_1}^2\, exp(\sigma A)}$$

ЛИТЕРАТУРА.

1. Аршон И. С. Евграфов М. А. О росте функций гармонических в цилиндре и ограниченных на его поверхности с нормальной производной. ДАН СССР, Т.142, № 4, 1962, с.762-765.
2. Ашурова З.Р., Теоремы типа Фрагмента-Линделефа для гармонических функций многих переменных. ДАН УзССР 1990, №5. 6-8 стр .
3. Ашурова З.Р., Жураева Н.Ю., Жураева У.Ю. О некоторых свойствах ядро Ярмухамедова, International Journal of Innovative Research , 2021,10, С.84–90, Impact Factor 7.512.
4. Жураева У.Ю. Теоремы типа Фрагмента-Линделефа для бигармонических функций многих переменных. Известия вузов.Математика 2022,№10.с 42-65.
5. Jurayeva. U.Yu. The Phragmen-Lindelof type theorems. Uzbek Mathematical Journal,2022, Volume 66, Issue 3. pp 54-61, (№3, 54–61). DOI:10. 29229/uzmj.
6. Ярмухамедов.Ш,Я. Задача Коши для полигармонического уравнения. Доклады РАН 2003 том 388 ст 162-165.