DOI: https://doi.org/10.5281/zenodo.14564054

ВЫЧИСЛЕНИЕ ТРОЙНОГО ИНТЕГРАЛА В ДЕКАРТОВОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

Элмуродова Ситора Саидмуродовна
Бухарский государственный университет магистр прикладной математики (по отраслям)

АННОТАЦИЯ

С древних времен люди измеряли площадь посевной площади, разделяя посевную площадь на небольшие прямоугольники, а затем складывая их площади, чтобы найти примерный размер площади. Архимед использовал тот же метод для нахождения поверхности и объема геометрических фигур. Ньютон отмечает, что все физические явления происходят в результате последовательного повторения операций дифференцирования и интегрирования. Многие результаты достигаются применением этого принципа. Евклид в своих «началах» заложил основы классической геометрии, а Архимед в малоизвестных работах разрабатывал «азы» дифференциального и интегрального счисления и теории бесконечно малых величин. Сегодня вычисление интегралов остается важной задачей математики. В статье предоставляется информация вычисление тройного интеграла в декартовой системе координат.

Ключевые слова: *Интеграл, двойной интеграл, тройной интеграл, плоскость, поверхность, объем, масса, декартовая система, трехмерной область, непрерывная функция.*

ABSTRACT

Since ancient times, people have measured the area of a crop field by dividing the crop field into small rectangles and then adding their areas together to find the approximate size of the area. Archimedes used the same method to find the surface and volume of geometric figures. Newton notes that all physical phenomena occur as a result of successive repetitions of the operations of differentiation and integration. Many results are achieved by applying this principle. Euclid laid the foundations of classical geometry in his "principles", and Archimedes, in little-known works, developed the "basics" of differential and integral notation and the theory of infinitesimals. Today, calculating integrals remains an important mathematical task. The article provides information on the calculation of the triple integral in the Cartesian coordinate system.

Keywords: *Integral, double integral, triple integral, plane, surface, volume, mass, Cartesian system, three-dimensional domain, continuous function.*

Обобщением определенного интеграла на случай функции трех переменных является так называемый тройной интеграл. Теория тройного интеграла аналогична теории двойного интеграла, поэтому изложим ее в сокращенном виде.

Пусть в замкнутой области V пространства OXYZ задана непрерывная функция $u = f(x; y; z)$. Разбив область V сеткой поверхностей на n частей $V_i(i = 1 \ldots n)$ и выбрав в каждой их них произвольную точку $M_i(x_i; y_i; z_i)$ составим интегральную сумму $\sum_{i=1}^{n} f(x_i; y_i; z_i)\Delta V_i$ для функции $f(x; y; z)$ по области V (ΔV_i – объем элементарной области V_i). Если предел интегральной суммы существует при неограниченном увеличении числа n таким образом, что каждая V_i стягивается в точку, то его называют тройным интегралом от функции $u = f(x; y; z)$ по области V и обозначают $\iiint_V f(x; y; z)dxdydz$ (или $\iiint_V f(x; y; z)\, dv$). Таким образом, по определению получаем

$$\iiint_V f(x; y; z)dxdydz = \lim_{n\to\infty(\max d_i \to 0)} \sum_{i=1}^{n} f(x_i; y_i; z_i)\Delta V_i = \iiint_V f(x; y; z)dv.$$

Здесь $dv = dxdydz$ - элемент объема d_i - диаметр i-области.

Посмотрим вычисление тройного интеграла в декартовой системе координат.

Предположим, что пространственная (трехмерная) область V, ограниченная замкнутой поверхностью S, обладает следующими свойствами:

1) всякая прямая, параллельная оси Oz, проведенная через внутреннюю (т.е. не лежащую на границе S) точку области V, пересекает поверхность S в двух точках;

2) вся область V проектируется на плоскость Oxy в правильную (двумерную) область D;

3) всякая часть области V, отсеченная плоскостью, параллельной любой из координатных плоскостей (Oxy, Oxz, Oyz), также обладает свойствами 1) и 2).

Область V, обладающую указанными свойствами, мы будем называть ***правильной*** трехмерной областью (рис.1).

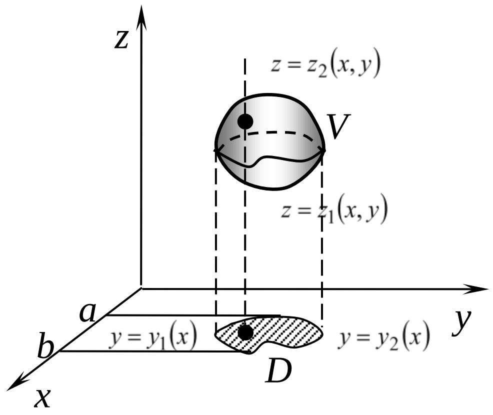

Рис. 1

Правильными трехмерными областями являются, например, эллипсоид, прямоугольный параллелепипед, тетраэдр и т.д. Пример неправильной трехмерной области дан на рис.2. Мы будем рассматривать только правильные области.

Пусть поверхность, ограничивающая область V снизу, имеет уравнение $z = Z_1(x, y)$, а поверхность, ограничивающая эту область сверху, имеет уравнение $z = Z_2(x, y)$ (рис.1).

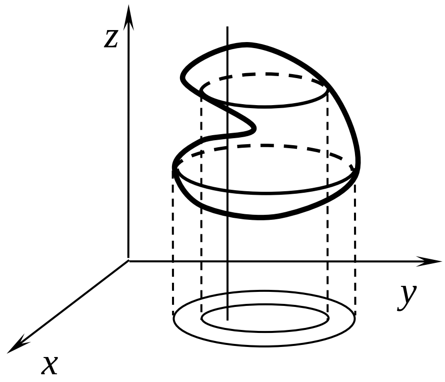

Рис. 2

Вычисление тройного интеграла, как и двойного, сводится к последовательному интегрированию, т.е. к повторному интегралу.

Пусть D — проекция области V на плоскость xOy.

Тогда $\iiint_V f(x, y, z)dxdydz = \iint_D dxdy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)dz.$

Двойной интеграл по области S сводим к повторному и получим

$$\iiint_V f(x, y, z)dxdydz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x, y, z)dz;$$

или

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} dx \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z).$$

Аналогично можно спроецировать область V на другую плоскость и расставить пределы интегрирования.

Пример 1. В тройном интеграле $\iiint_V f(x,y,z)dxdydz$ расставить пределы интегрирования в порядке (x,z,y), если область V ограничена поверхностями: $y = x^2$, $y = 1$, $x^2 + y^2 = z$.

Решение. Построим область V (рис.3):

$y = x^2$ — параболический цилиндр вдоль оси Oz,

$y = 1$ — плоскость, параллельная плоскости xOz,
$z = x^2 + y^2$ — параболоид,
$z = 0$ — координатная плоскость xOy.
Рассмотрим проекцию тела на плоскость xOz (рис. 4.), так как пределы интегрирования нужно расставить в порядке (x,z,y):

$$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz = \iint_D dxdz \int_{y_1(x,z)}^{y_2(x,z)} f(x,y,z)dy.$$

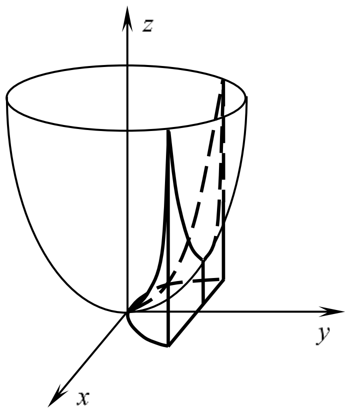

Рис. 3

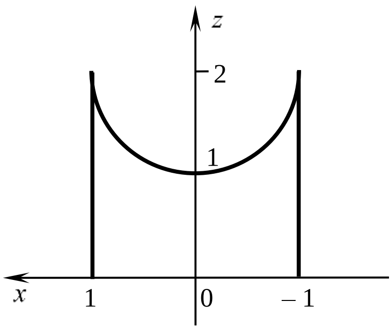

Рис. 4

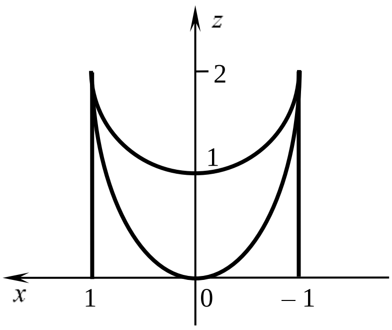

Рис. 5

Однако в разных частях этой области переменная y изменяется в разных пределах. Поэтому разобьем область D на части (рис. 5) и возьмем по каждой части интеграл

$$\int_{-1}^{1} dx \int_{0}^{x^2+x^4} dz \int_{x^2}^{1} f(x,y,z)\, dy + \int_{-1}^{1} dx \int_{x^2+x^4}^{x^2+1} dz \int_{\sqrt{z-x^2}}^{1} f(x,y,z) dy.$$

Пример 2. Вычислить тройной интеграл $\iiint_V xzdxdydz$ по области V, ограниченной поверхностями: $y = 2x$, $y = 0$, $x = 1$, $z = x^2 + y^2$, $z = 0$.

Решение. Построим область V (рис. 6):

$z = x^2 + y^2$ — параболоид,

$y = 2x$ — вертикальная плоскость,
$y = 0$ — координатная плоскость xOz,
$x = 1$ — плоскость, параллельная координатной плоскости yOz,
$z = 0$ — координатная плоскость xOy.

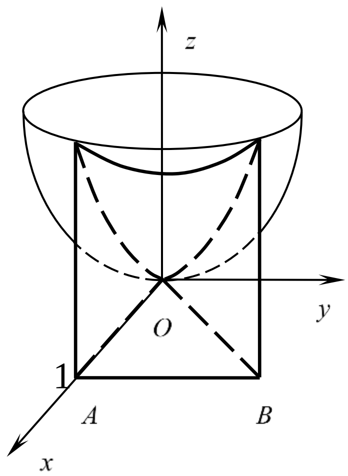

Рис. 6

Проекцией на плоскость xOy является треугольник AOB (рис. 4), таким образом имеем

$$\iiint_V xzdxdydz = \int_0^1 dx \int_0^{2x} dy \int_0^{x^2+y^2} xzdz =$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^{2x} x \frac{z^2}{2}\Big|_0^{x^2+y^2} dy = \frac{1}{2}\int_0^1 dx \int_0^{2x} x\,(x^4 + 2x^2y^2 + y^4)dy =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(x^5 y + \frac{2}{3}x^3y^3 + \frac{1}{5}xy^5\right)\Big|_0^{2x} dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \left(2x^6 + \frac{16}{3}x^6 + \frac{32}{5}x^6\right)dx = \frac{103}{15}\cdot\frac{x^7}{7}\bigg|_0^1 = \frac{103}{105}.$$

В качестве вывода можно применение приложения тройного интеграла.

Объем тела

Объем тела V выражается формулой $V = \iiint_V dv = \iiint_V dxdydz$.

Масса тела

Масса тела при заданной плотности $\gamma(x;y;z)$ вычисляется с помощью интеграла (тройного) $m = \iiint_V \gamma(x;y;z)dxdydz$.

Статические моменты

Моменты S_{xy}, S_{xz}, S_{yz} тела относительно координатных плоскостей OXY, OXZ, OYZ вычисляются по формулам $S_{xy} = \iiint_V z\gamma(x;y;z)dv$, $S_{yz} = \iiint_V x\gamma(x;y;z)dv$ и $S_{xz} = \iiint_V y\gamma(x;y;z)dv$.

Центр т   яжести

Координаты центра тяжести тела $x_c = \frac{Syz}{m}$, $y_c = \frac{Sxz}{m}$, $z_c = \frac{Sxy}{m}$.

ИСПОЛЬЗОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Р.М. Султанаев Высшая математика Курс лекций для студентов всех специальностей очной и заочной форм обучения. Тюмень, 2009
2. Смолянов О.Г., Шавгулидзе Е.Т., Континуальные интегралы, 2015, URSS Москва, ISBN 978-5-9710-2133-9, 336 с.
3. Imomova Shafoat Mahmudovna, Mardonova Maftunabonu Abrorovna. CHIZIQLI ALGEBRAIK TENGLAMALAR SISTEMASINI YECHISHNING ANIQ USULLARI VA TADBIQLARI// Educational Research in Universal Sciences. VOLUME 3 | SPECIAL ISSUE 2 | 2024, С.397-404
4. A. Hayotov, S. Babaev, N.Olimov, and Sh.Imomova, “The error functional of optimal interpolation formulas in W2(,2σ,1) space,” AIP Conference Proceedings 2781, 020044 (2023), https://doi.org/10.1063/5.0144752.
5. Samandar Babaev, Nurali Olimov, Shafoat Imomova, and Bekhruzjon Kuvvatov, “Construction of Natural L Spline in W2(,2σ,1) Space” , AIP Conf. Proc. 3004, 060021 (2024)https://doi.org/10.1063/5.0199595

6. Imomova Sh.M., Mardonova M.A. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini oddiy iteratsiya usuli bilan Mathcad muhitida sonli yechish// Buxoro davlat universiteti ilmiy axboroti № 5, 2024, C.30-35.

7. Imomova Sh.M., Mardonova M.A. Koshi masalasini taqribiy yechish// Buxoro davlat universiteti ilmiy axboroti № 9, 2024, C.39-46.

8. Imomova Shafoat Mahmudovna, Zarnigor Bahodirovna Rahmonqulova. FUNKSIYALARNI MATHCAD MUHITIDA SONLI INTEGRALLASH// BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI ILMIY AXBOROTI № 4, 2023, C.9-14.

9. Камалова Н. И., Бадриддинова Г. М. СИМБИОЗ ЦИФРОВОГО И АНАЛИТИЧЕСКОГО МЫШЛЕНИЯ: ВЗАИМНАЯ ИНТЕГРАЦИЯ ПРОГРАММИРОВАНИЯ И МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА В СОВРЕМЕННОМ МИРЕ //Proceedings of International Conference on Scientific Research in Natural and Social Sciences. – 2023. – Т. 2. – №. 12. – С. 167-171.