DOI: https://doi.org/10.5281/zenodo.14499080

MATEMATIK INDUKSIYA METODI

Djabbarov Maxmudjon Maqsudovich,
Xasanova Go‘zal Maxmud qizi
Yuldashev Sanjarbek Muhammad o‘g‘li
Jaloliddin Manguberdi nomidagi harbiy akademik litseyi
Matematika fani o‘qituvchilari

Annotatsiya: *Ushbu maqolada matematik induksiya metodi yaratilish tarixi, fanlarda qo‘llanilishi, shuningdek akademik litseylar va umumiy o‘rta ta’lim maktablari uchun olimpiada masalalari hamda elementar matematikada mavjud ayrim murakkab tengliklarni isbotlashning ba’zi usullari keltirilgan.*

Kalit so‘zlar: *o‘xshatish tushunchasi, proporsiya, tabiiy tanlash, P.Ferma, L.Eyler, deduksiya, induksiya, Gersonid, 1321 yil.*

Induksiya tushunchasiga o‘tishdan avval o‘xshatish tushunchasini tahlil qilamiz. O‘xshatish belgisi qadimgi yunonlarda boshlanishida sonlar proporsiyasi shaklida ifodalangan. Masalan, $50 \div 5 = 70 \div 7$. Keyinchalik o‘xshatish so‘zi shakllarga vaboshqa narsalarga ham tadbiq etila boshlandi.

Hozirgi paytda o‘xshatish barcha fanlarda xizmat qiladi. Kimyo, biologiya, fizika va geologiya fanlarida o‘xshatishdan keng foydalaniladi.

Matematikada shunday masalalar mavjudki, ba’zi farazlar yakuniy natijalarga ko‘ra, noto‘g‘ri kelib chiqadi. Shunday masalalardan biri1640-yilda tug‘ilgn P.Fermaning o‘ziga tegishli hisoblanadi: u $fn = 2^{2^n} + 1$ ko‘rinishidagi natural sonlarning barchasi tub son deb faraz qilingan va faqat $n = 0,1,2,3,4$ lar uchun tekshirilgan. Lekin 1732-yili Leonard Eyler Pyer Fermaning farazini inkor etdi. Uning xatoligi shunda ediki, $fn = 2^{2^n} + 1$ bir nechta xususiy qiymatlar uchun hisoblab (bu xususiy tasdiq), $fn = 2^{2^n} + 1$ ning qiymati ixtiyoriy n natural son uchun tub son degan umumiy xulosaga kelgan. L.Eyler soda induksiya xatolikka olib kelishi haqida haqiqatni aytgan.

Matematikada cheksiz to‘plam haqida mulohaza bildirilganda, chekli to‘plamni tekshirish isbotlashni almashtira olmaydi.

Shunday qilib, ikkita tushunchani farqlash lozim:

1) Xususiy tasdiq:
2) Umumiy tasdiq.

Umumiy tasdiqdan xususiy tasdiqqa oʻtish *deduksiya* deyiladi.

Misol. Quyidagi tasdiqlardan qaysi biri xususiy, qaysi biri umumiy:

1) Nol raqami bilan tugallanuvchi son 5 ga boʻlinadi?
2) 60 soni 5 ga boʻlinadi?

Xususiy tasdiqdan umumiy tasdiqqa oʻtish *induksiya* deyiladi. Induksiya ham toʻgʻri, ham notoʻgʻri natijaga olib kelishi mumkin. Induksiya Metodi matematikada keng qoʻllaniladi, lekin undan toʻgʻri foydalanish lozim.

Xulosa:

1) Barcha nol raqami bilan tugallanuvchi sonlar 5 ga boʻlinadi (toʻgʻri)
2) Barcha uch xonali sonlar 5 ga boʻlinadi (notoʻgʻri).

Bu usul hozirgi kunda matematik induksiya metodi deyiladi. Ushbu metodni ba’zi qadimgi grek olimlariham foydalanishgan. Dastlab bu metod 1321-yil Gersonid tomonidn foydalanilgan. XIX asrning ikkinchi yarmigacha bu metod asosiy isbotlash metodi hisoblangan.

Matematik induksiya – matematik induksiya prinsipiga asoslangan matematik tasdiqni isbotlovchi metod.

Matematik induksiya metodi — matematikada xususiy natijalarni isbotlashda ishlatiladigan qulay va samarali usul boʻlib, odatda nisbatan aniq yoki umumiy formula yoki xulosani koʻrsatishda qoʻllaniladi. Ushbu metod, biror matematik xulosaning barcha tabiiy sonlar uchun toʻgʻriligini isbotlashda keng qoʻllaniladi. Matematik induksiya metodini tushunish va toʻgʻri ishlatish matematikada murakkab muammolarni hal qilishda katta yordam beradi.

Induksiya usulining asosi

Matematik induksiya, ikki asosiy bosqichga boʻlinadi:

1. *Birinchi bosqich (Asosiy qadam yoki “induksiya boshlanishi”)*: Bu bosqichda, odatda, $n = 1$ boʻlgan holat tekshiriladi. Bu, xulosaning toʻgʻriligini boshlangʻich nuqtada isbotlashni anglatadi. Agar bu bosqich toʻgʻri boʻlsa, induksiya boshlanishi oʻrnatiladi.
2. *Ikkinchi bosqich (Induksion qadam)*: Bu bosqichda, xulosa, agar u $n = k$ uchun toʻgʻri boʻlsa, $n = k + 1$ uchun ham toʻgʻri ekanligini koʻrsatish orqali isbotlanadi. Ya’ni, biz $k=1, 2, 3,...$ kabi har qanday tabiiy son uchun xulosaning toʻgʻriligini isbotlashni boshlaymiz va agar $n = k$ uchun toʻgʻri boʻlsa, $n = k + 1$ uchun ham toʻgʻri boʻlishini isbotlaymiz.

Shu tarzda, birinchi bosqichda to‘g‘ri bo‘lgan xulosa, keyingi barcha tabiiy sonlar uchun ham to‘g‘ri bo‘lishi ko‘rsatiladi. Demak, matematik induksiya metodini qo‘llaganimizda, boshlang‘ich holatni va induksiya qadamini to‘g‘ri bajarish kerak.

Matematik induksiya metodining formal ko'rinishi

Matematik induksiya metodini quyidagi tarzda formallashtirish mumkin:

Teorema: Agar xulosa $P(n)$ har bir tabiiy son n uchun to‘g‘ri bo‘lsa, unda:

1. $P(1)$ to‘g‘ri ekanligini ko‘rsating (induksiya boshlanishi).
2. Agar $P(k)$ to‘g‘ri bo‘lsa, $P(k+1)$ ham to‘g‘ri ekanligini ko‘rsating (induksiya qadam).

Shundan so‘ng, $P(n)$ har bir tabiiy son uchun to‘g‘ri ekanligi isbotlanadi.

Matematik induksiya misollari

1-masala: Oddiy formulalar yordamida induksiya

Teorema: Har bir tabiiy son n uchun quyidagi tenglama to‘g‘ri:

$$S(n) = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Isbot:

1. *Induksiya boshlanishi (n = 1):*

   $S(1) = 1$ va $\frac{1(1+)}{2} = 1$

   Demak, boshlang‘ich holat to‘g‘ri.
2. *Induksiya qadam*: Faraz qilaylik, $S(k)$tenglama to‘g‘ri bo‘lsin, ya’ni:

   $$S(k) = 1 + 2 + 3 + \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$$

   Endi, $S(k+1)$ ni isbotlashimiz kerak.

   $$S(k+1) = S(k) + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1)$$

   Ushbu ifodani to‘g‘ri soddalashtiramiz:

   $$S(k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + \frac{2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

   Demak, induksiya qadamini ko‘rsatdik va teorema to‘g‘ri.

2-masala: Matematikaning nisbiy murakkabligi

Teorema: Har bir $n \geq 2$ uchun:

$$2^n > n^2$$

Isbot:

1. *Induksiya boshlanishi (n = 2):*

   $2^2 = 4$ va $2^2 \geq 4$ bo‘lib, to‘g‘ri.

2. *Induksiya qadam*: Faraz qilaylik, $2^k > k^2$to‘g‘ri bo‘lsin, ya’ni $k \geq 2$ uchun to‘g‘ri. Endi 2^{k+1} ni isbotlaymiz.

$$2^{k+1} = 2^k \cdot 2$$

Induksiya gipotezasi bo‘yicha, $2^k > k^2$shuning uchun:

$$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2 \cdot k^2 = 2k^2$$

Endi $2k^2 > (k+1)^2$ ekanligini ko‘rsatishimiz kerak. Bu to‘g‘ri, chunki:

$$2k^2 - (k+1)^2 = 2k^2 - (k^2 + 2k + 1) = k^2 - 2k - 1 > 0$$

Bu tenglama $k \geq 2$ uchun to‘g‘ri bo‘ladi.

Shu bilan, teoremni isbotladik.

Induksiya metodining afzalliklari va kamchiliklari

Afzalliklari:

- Induksiya metodi matematik xulosalarni isbotlashda kuchli vositadir.
- Ko‘plab aniq xulosalarni, formulalarni va natijalarni isbotlashda ishlatiladi.
- Oddiy va to‘g‘ri bajarilishi oson bo‘lishi mumkin.

Kamchiliklari:

- Ba’zi hollarda induksiya qadamini to‘g‘ri olib borish qiyin bo‘lishi mumkin.
- Tabiiy sonlar uchun bo‘lgan umumiy xulosalarni isbotlashda ba’zida noto‘g‘ri qadamlar yoki xatoliklar kiritilishi mumkin.

Xulosa

Matematik induksiya metodi, aniq formulalar va xulosalarni isbotlashda samarali usul bo‘lib, matematikada keng qo‘llaniladi. Bu metodni o‘rganish va to‘g‘ri ishlatish, turli matematik masalalarni yechishda yordam beradi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. **Niven, I., Zuckerman, H. S., & Montgomery, H. L.** (2008). *An Introduction to the Theory of Numbers* (5th ed.). John Wiley & Sons.
    - Bu kitob matematik induksiya metodini va boshqa asosiy matematik usullarni tushuntiruvchi yaxshi manba hisoblanadi.
2. **Rosen, K. H.** (2012). *Discrete Mathematics and Its Applications* (7th ed.). McGraw-Hill.
    - Diskret matematika bo‘yicha eng mashhur darsliklardan biri bo‘lib, unda induksiya metodi va uning matematik amaliyotlari ko‘plab misollar bilan keltirilgan.
3. **Dummit, D. S., & Foote, R. M.** (2004). *Abstract Algebra* (3rd ed.). John Wiley & Sons.

   - Algebra va induksiya metodlarini chuqurroq o‘rganish uchun yaxshi manba.
4. **Harris, R. L., & Stocker, W. L.** (2011). *Introduction to Mathematical Logic* (6th ed.). Prentice Hall.
   - Matematik mantiq va induksiya metodlarini tushuntiruvchi kitob.
5. **Grolmusz, V.** (2005). *Mathematical Induction* (Scribd).
   - Matematik induksiya metodini amaliy jihatdan o‘rgatishga qaratilgan onlayn darslik yoki qo‘llanma.
6. **Stewart, J.** (2015). *Calculus: Early Transcendentals* (8th ed.). Brooks/Cole.
   - Induksiya metodini hisoblash va analizda qanday qo‘llashni tushuntiradi.
7. **Khinchin, A. Y.** (2004). *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*. Dover Publications.
   - Bu kitobda, induksiya usulining matematik asoslari va uning quantum mexanikasidagi qo‘llanilishi haqida so‘z yuritiladi.