DOI: https://doi.org/10.5281/zenodo.14498594

KO‘P O‘LCHAMLI KUB ELEMENTLARI SONINI HISOBLASH

D.E.Davletov
Renessans ta’lim universiteti Matematika va
tabiiy fanlar kafedrasi dotsenti

Sh.I.Sharipova
Renessans ta’lim universiteti Matematika va
tabiiy fanlar kafedrasi katta o‘qituvchisi

Annotatsiya: *Ushbu maqolada ko‘p o‘lchamli kub tushunchasi, uni hosil qilish jarayoni, n o‘lchamli kublarning uchlari, qirralari, yoqlari sonini hisoblashning umumiy ifodasi va analitik ko‘rinishi berilib, n o‘lchamli kub elementlarini* aniqlovchi *ko‘phadlari keltirilgan.*

Kalit so‘zlar: *kesma, kvadrat, kub, n o‘lchamli kublar, n o‘lchamli kubning ko‘phadi.*

Abstract: *This article presents the concept of a multidimensional cube, the process of its creation, a general expression and analytical view of calculating the number of vertices, edges, sides of n-dimensional cubes, and polynomials defining the elements of n-dimensional cubes.*

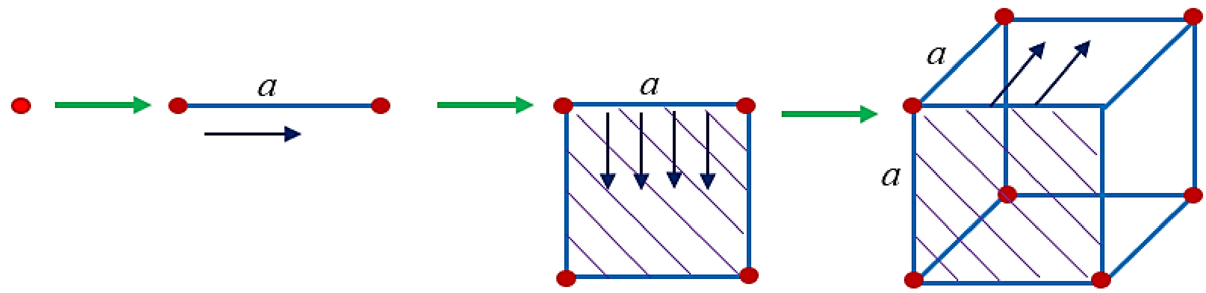
Key words: *cross section, square, cube, n-dimensional cubes, n-dimensional cube polynomial.*

Kirish. O‘quvchilar tomonidan doimiy ravishda geometrik masalalar yechib borish nazariyani ongli va puxta o‘zlashtirishga yordam beradi, uning amaliy qiymatini ko‘rsatadi, shu bilan birga masala yechish o‘quvchining mantiqiy tafakkurini, ijodiy tashabbuskorliklarini, fazoviy tasavvurlarini rivojlantirishda hamda ularga bir qancha zarur amaliy mahorat va malakalar beradi. Jumladan tekislikda kvadrat va uning xossalarini puxta o‘zlashtirga o‘quvchi, kubning yoqlari kvadratlardan iborat ekanligini tasavvur qilgan holda uning elementlarini topishga doir masalalarni qiynalmay hal qila oladi. O‘quvchilarga ko‘p o‘lchamli fazolar to‘g‘risida tushuncha berganimizda o‘z-o‘zidan ular tomonidan bu fazolarda ko‘pyoqlarning asosan kubning ko‘rinishi va uning elementlari soni qanday o‘zgarishi bo‘yicha savollar tug‘ilib, qiziqishlari ortib boradi. Ko‘p o‘lchamli ko‘pyoqlarni o‘rganish fazoviy tasavvurlarni, mantiqiy fikrlashlarni rivojlantirishda muhim o‘rin tutadi.

Mavzuga oid adabiyotlarning tahlili. Ko‘p o‘lchovli kublar yoki giperkublar mavzusi geometriya, grafiklar nazariyasi, toifalar nazariyasi va informatika va fizikadagi ilovalarni o‘z ichiga olgan keng doiradagi sohalarni qamrab oladi. Ushbu mavzu bo‘yicha adabiyotlar xilma-xil bo‘lib, ko‘p o‘lchovli ob’ektlarning nazariy jihatlarini ham, amaliy qo‘llanilishini ham qamrab oladi. Ko‘p o‘lchamli kublar nazariyasi o‘rganilgan ba’zi ishlarni keltiramiz: "Geometrical Foundations of the Theory of n-Dimensional Space" (V. Klee, 1961) – giperkublarning geometrik xossalari, ularning simmetriyasi va topologik xarakteristikalari batafsil o‘rganilgan, "Higher-Dimensional Geometry" (P. McMullen, 1989) — ko‘p o‘lchovli ob’ektlarni, shu jumladan giperkublarni ko‘p o‘lchovli geometriya nuqtai nazaridan tasvirlaydi, "The Theory of Polytopes" (Branko Grünbaum, 2003) — ko‘pburchaklar, shu jumladan giperkublar, ularning topologik va kombinatorik xususiyatlari muhokama qilingan holda batafsil tavsiflangan, “Многомерный куб” (Г. А. Гальперин, 2015)- ko‘p o‘lchamli kub tushunchasi, uni hosil qilish jarayoni, n o‘lchamli kublarning uchlari, qirralari, yoqlari sonini hisoblashning umumiy ifodasi va analitik ko‘rinishi berilib, n o‘lchamli kub, tetraedr, oktaedrlarning elementlarini aniqlovchi ko‘phadlari keltirilgan.

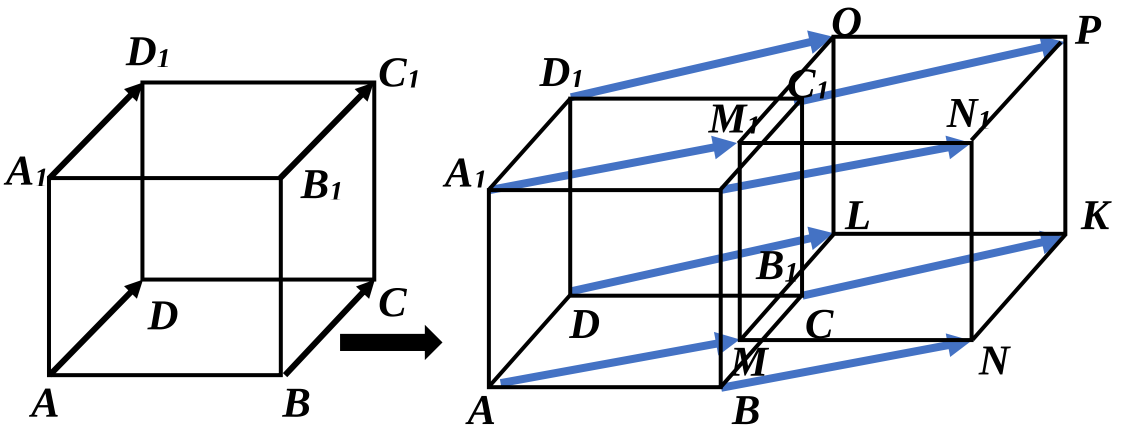
Tadqiqot metodologiyasi. Ma’lumki, uch o‘lchamli kubning uchta o‘lchami bo‘lib, ular: bo‘yi, eni va balandligi. Tekislikda kubning analogi kvadrat bo‘lib, u ikki o‘lchamga ega: bo‘yi va eni. Shuning uchun uni ikki o‘lchamli kub deb qarash mumkin. Xuddi shunday mulohaza yuritsak demak to‘g‘ri chiziqdagi kesmani bir o‘lchamli kub deyish mumkin.

To‘rt o‘lchamli kubni qurishimiz uchun biz kichik o‘lchamli kublarni induktiv fikr yuritib qurishdan boshlaymiz. Nuqtani olib uni to‘g‘ri chiziq bo‘ylab harakatlantirsak, biz ma’lum uzunlikdagi a kesmaga ega bo‘lamiz, demak bizda bir o‘lchamli ($n=1$) kub hosil bo‘ldi. Ushbu kesmani unga perpendikulyar yo‘nalishda a miqdorga parallel ko‘chirsak biz tomonlari a ga teng bo‘lgan kvadratga ega bo‘lamiz, ikki o‘lchamli ($n=2$) kub hosil bo‘ladi. Nihoyat, kvadratni uchinchi o‘lcham bo‘ylab siljitib, biz qirrasi a ga teng bo‘lgan, $n=3$ o‘lchamli kubga ega bo‘lamiz.

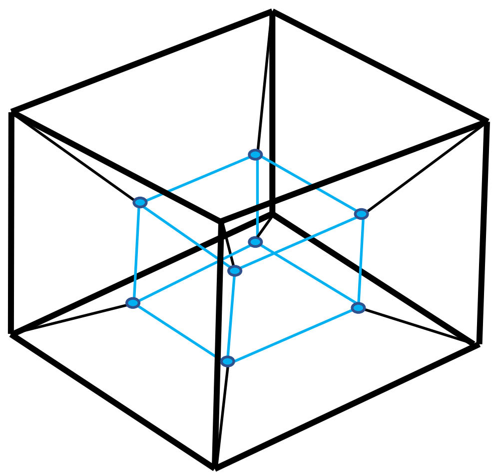


Endi yuqoridagilarga o‘xshash holda harakat qilib, oldingi uchta yo‘nalishga perpendikulyar bo‘lgan yo‘nalishda uch o‘lchamli kubni harakatlantirib to‘rt o‘lchamli kubni (giperkub) hosil qilamiz.

Giperkub (to‘rt o‘lchamli kub) tasvirini ikki o‘lchamli tekislikda tasvirlayotganimiz uchun biz uning tekislikdagi proyeksiyasini tasvirini keltiramiz.



Odatda to‘rt o‘lchamli gubning (to‘rt o‘lchamli gub tesserakt ham deyiladi) ko‘rgazmali tasvirini hosil qilish ushun ikkinchi kubni kattalashtirib dastlabki kubni uning ichiga joylab, tasvirni tekislikka proyeksiyalasak quyidagi ko‘rinishga ega bo‘lamiz:



Tahlil va natijalar. Endi ikki o‘lchamli kub, ya’ni kvadratdan uch o‘lchamli kub va uch o‘lchamli kubdan to‘rt o‘lchamli kub hosil qilish jarayonida uchlari, qirralari va yoqlari soni qanday o‘zgarishini ko‘rib chiqamiz.

Dastlab kvadratdan uch o‘lchamli kubni qurishni qaraymiz:

1. Barcha uchlari ikki barobar ortadi (qo‘shgandan keyin siljitilgan kvadratning uchlari) va ularning qiymati 2·4=8 aylanadi;

2. Barcha qirralar ikki barobar o‘zgaradi (qirralar qo‘shiladi). O‘zgartirilgan kvadrat, yangi *ABCD* kvadratining uchlaridan chiqayotgan qirralar, ularning qiymati 2·4+4 = 12 ga teng;

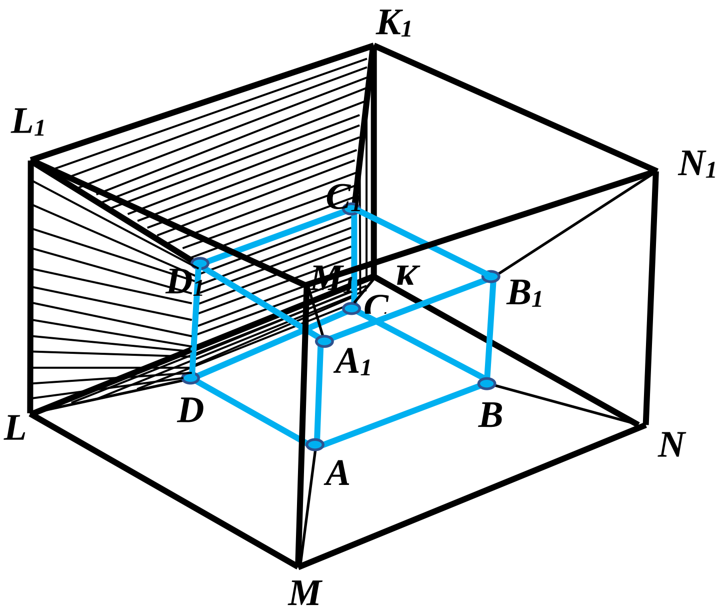
3. *ABCD* yoqqa unga parallel bo‘lgan yana bitta *A’B’C’D’* yoq, hamda to‘rtta yon yoq qo‘shiladi va jami yoqlari soni 2+4=6 bo‘ladi.

Endi kubidan to‘rt o‘lchamli kub qurishni ko‘rib chiqamiz:

1. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kubning uchlari soni ikki barobar ortadi, yani ular soni $2\cdot 8 = 16$ ta bo‘ladi.

2. $AB, BC, \ldots, D_1A_1$ qirralari soni ikki barobar ortadi, ularga tashqi kubning $MN, NK, \ldots, L_1M_1$ qirralari mos keladi, shuningdek, $A, B, C, D, A_1, B_1, C_1, D_1$ uchlardan “o‘sib” chiqqan yangi qirralarni qo‘shiladi: $2\cdot 12+8 = 32$

3. Barcha $ABCD, \ldots, A_1B_1C_1D$ yoqlar soni ikki barobar ortib ularga tashqi kubning $MNKL, \ldots, M_1N_1K_1L_1$ yoqlar mos keladi. Shuningdek $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kubning barcha qirralaridan “o‘sib chiquvchi” yangi yoqlar qo‘shiladi: $2\cdot 6 + 12 = 24$. Demak to‘rt o‘lchamli kubning ikki o‘lchamli yoqlari soni 24 ta.



4) Ikkita $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kub va undan parallel ko‘chirish bilan hosil qilingan $MNKLM_1N_1K_1L_1$ uch o‘lchamli kublardan tashqari $ABCDA_1B_1C_1D_1$ kubning yoqlaridan “o‘sib chiquvchi” oltita kesik piramidalarni ham qo‘shish kerak. Natijada to‘rt o‘lchamli kubning $2+6 = 8$ ta uch o‘lchamli yoqlari hosil bo‘ladi.

Yuqoridagilarga asosan hosil bo‘layotgan kublarning uchlari, qirralari va yoqlari sonini topishni analitik ifodasini ko‘rib chiqamiz.

n o‘lchamli kublarning k o‘lchamli yoqlari sonini F_n^k orqali belgilaymiz.

Nuqta no‘l o‘lchamli kub bo‘lgani uchun faqat bitta no‘l o‘lchamli yoq mavjud. Kesma yani bir o‘lchmli kub ($n=1$) uchun ikkita no‘l o‘lchamli ($k=0$) yoq (uchlari) va bitta ($n=1$) bir o‘lchamli kub (kesmaning o‘zi) mavjud. Ikki o‘lchamli kub ($n=2$) - kvadratda 4 ta no‘l o‘lchamli yoqlar - uchlari ($k=0$), 4 ta bir o‘lchamli ($k=1$) yoqlar – tomonlari mavjud. Shu jarayonni davom qildiradigan bo‘lsak quyidagi munosabatlarga ega bo‘lamiz:

$n=0$ (nuqta) da $F_0^0 = 1$, $n=1$ (kesma, 1 o‘lchamli kub) da $F_1^0 = 2$, $F_1^1 = 1$, $n=2$ (kvadrat, 2 o‘lchamli kub)da $F_2^0 = 2 \cdot F_1^0 = 4$, $F_2^1 = 2 \cdot F_1^1 + F_1^0 = 4$, $F_2^2 = 1$, $n=3$ (3 o‘chamli kub)da $F_3^0 = 2 \cdot F_2^0 = 8$, $F_3^1 = 2 \cdot F_2^1 + F_2^0 = 12$, $F_3^2 = 2 \cdot F_2^2 + F_2^1 = 6$, $F_3^3 = 1$, $n=4$ da

$F_4^0=2\cdot F_3^0=16,\ \ F_4^1=2\cdot F_3^1+F_3^0=32,\ \ F_4^2=2\cdot F_3^2+F_3^1=24,\ \ F_4^3=2\cdot F_3^3+F_3^2=8,\ \ F_4^4=1.$

Yuqoridagilarga asosan kublarning uchlari, qirralari va yoqlari sonini topishni ifodasi $F_{n+1}^0=2\cdot F_n^0$, $F_{n+1}^k=2\cdot F_n^k+F_n^{k-1}$, (bunda $1\le k\le n$) ko‘rinishda bo‘ladi.

Soddalik uchun F_n^k ni F_k orqali belgilaymiz va quyidagi jadvalni hosil qilamiz:

n	F_0	F_1	F_2	F_3	...	F_{n-1}	$F_n=1$	-
$n+1$	$2F_0$	$2F_1+F_0$	$2F_2+F_1$	$2F_3+F_2$		$2F_{n-1}+F_{n-2}$	$2F_n+F_{n-1}$	$F_{n+1}=1$

F_k-k o‘lchamli yoqlar soni.

Koeffisiyentlari $F_0, F_1, \ldots\ldots, F_{n-1}, F_n$ bo‘lgan x o‘zgaruvchining quyidagi ko‘phadini qaraymiz:

$$P_n(x)=F_0x^n+F_1x^{n-1}+F_2x^{n-2}+\ldots+F_{n-1}x+F_n$$

Endi yuqoridagi jadval asosida quyidagi ko‘phadni tuzamiz

$$P_{n+1}(x)=(2F_0)x^{n+1}+(2F_1+F_0)x^n+(2F_2+F_1)x^{n-1}+\ldots+(2F_{n-1}+F_{n-2})x^2+$$
$$+(2F_n+F_{n-1})x+(2F_{n+1}+F_n).$$

Agar yuqoridagi $P_n(x)$ ko‘phadni $2x+1$ ga ko‘paytirsak $P_{n+1}(x)$ ko‘phad hosil bo‘ladi. Demak $P_{n+1}(x)=(2x+1)P_n(x)$.

Teorema. $P_n(x)=(2x+1)^n$ [1]

Isbotlash induksiya orqali olib boriladi: $n=0$ (nuqta) uchun $P_n(x)=1=(2x+1)^0$ o‘rinli deb qabul qilamiz. $P_{n+1}(x)$ uchun isbotlaymiz:

$$P_{n+1}(x)=P_1(x)(2x+1)=(2x+1)^n(2x+1)=(2x+1)^{(n+1)}.$$

Demak, n o‘lchamli kubning ko‘phadi: $P_n(x)=(2x+1)^n$ ga teng.

Endi $n=1,2,3,4$ ni tekshirib ko‘raylik, $(2x+1)^n$ ko‘phadning koeffitsientlari turli o‘lchamdagi yoqlari sonini ifodalaydi.

1. $P_1(x)=(2x+1)^1=2x+1;$

bir o‘lchamli kub (kesma) 2 ta uchi va 1 ta kesma (bir o‘lchamli yoq).

2. $P_2(x)=(2x+1)^2=4x^2+4x+1;$

kvadratning 4 ta uchi (no‘l o‘lchamli yoq), 4 ta tomoni (bir o‘lchamlin yoq) va 1 ta ikki o‘lchamli yoq.

3. $P_3(x) = (2x+1)^3 = 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1;$

uch o'lchamli kubning 8 ta uchi (no'l o'lchamli yoq), 12 ta qirrasi (bir o'lchamli yoq), 6 ta yoq (ikki o'lchamli yoq) va 1 ta uch o'lchamli yoq.

4. $P_4(x) = (2x+1)^4 = 16x^4 + 32x^3 + 24x^2 + 8x + 1;$

giperkub (to'rt o'lchamli kub)da 16 ta uch (no'l o'lchamli yoq), 32 ta qirralar (bir o'lchamli yoq), 24 ta ikki o'lchamli yoq, 8 ta uch o'lchamli yoq va 1 ta to'rt o'lchamli yoq mavjud.

F_n^k uchun analitik ifoda $F_n^k = C_n^k \cdot 2^{n-k}$ ko'rinishda bo'lib , bunda $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Masalan:

Uch o'lchamli kub ($n = 3$)da $2^{3-0} \cdot C_3^0 = 8 \times 1 = 8$ ta burchak ($k=0$), $2^{3-1} \cdot C_3^1 = 4 \times 3 = 12$ ta qirra ($k=1$), $2^{3-2} \cdot C_3^2 = 2 \times 3 = 6$ ta yoq ($k=2$), $2^{3-3} \cdot C_3^3 = 1 \times 1 = 1$ ta 3 o'lchamli yoq ($k=3$).

Agar $P_n(x) = (2x+1)^n$ dagi $2x+1$ ifodada 2 va 1 koeffisiyentlarni o'rinlarini almashtirsak hosil bo'lgan $(x+2)^n$ ifodaning yoyilmasi $P_n(x) = (2x+1)^n$ ko'phadning F_n^k koeffisiyentlari teskari tartibda yozilgani hosil bo'ladi [1]:

$$Q_n(x) = (x+2)^n = F_n^n x^n + F_n^{n-1} x^{n-1} + F_n^{n-2} x^{n-2} + \ldots + F_n^1 x^1 + F_n^0$$

$Q_n(x)$ ko'phad ham n o'lchamli kubning ko'phadi bo'ladi. Bu ko'phad $P_n(x)$ dan ko'ra foydalanishga qulay, chunki $Q_n(x)$ ko'phadning x^k oldidagi F_n^k koeffisiyentlari k o'lchamli yoqlari sonini beradi. Masalan:

1. *$n=1$ da $Q_1(x) = (x+2)^1 = 1 \cdot x + 2 \cdot x^0$, ya'ni kesma (bir o'lchamli kub)da bitta bir o'lchamli yoq va ikkita no'l o'lchamli yoq mavjud;*
2. *$n=2$ da $Q_2(x) = (x+2)^2 = 1 \cdot x^2 + 4 \cdot x + 4 \cdot x^0$, ya'ni kvadrat (ikki o'lchamli kub)da bitta ikki o'lchamli yoq, to'rtta bir o'lchamli yoq va to'rtta no'l o'lchamli yoq mavjud;*
3. *$n=3$ da $Q_3(x) = (x+2)^3 = 1 \cdot x^3 + 6 \cdot x^2 + 12 \cdot x^1 + 8 \cdot x^0$, ya'ni uch o'lchamli kubda bitta uch o'lchamli yoq, oltita ikki o'lchamli yoq , o'n ikkita bir o'lchamli yoq va 8 ta no'l o'lchamli yoq mavjud;*

4. *n=4 da* $Q_4(x) = (x+2)^4 = 1\cdot x^4 + 8\cdot x^3 + 24\cdot x^2 + 32\cdot x^1 + 16\cdot x^0$, *ya'ni to'rt o'lchamli kubda bitta to'rt o'lchamli yoq, sakkizta uch o'lchamli yoq , 24 ta ikki o'lchamli yoq, 32 ta bir o'lchamli yoq va 16 ta no'l o'lchamli yoq mavjud va x.k.*

Xulosa va takliflar. Ma'lumki geometriyani o'rganishda fazoviy tasavvurlarni rivojlanganlik darajasining ahamiyati kattadir. Geometrik masalalarni yechishning turli usullarini bilish turli qiyinliklardagi masalalarni yechishning maqbul usullarini tanlash imkonini kengaytiradi. Biz ushbu maqolada ko'p o'lchamli fazolarda n o'lchamli kub va uning elementlarini aniqlash usullari o'quvchilarning fazoviy tasavvurlarini rivojlantirib geometriya masalalarini yechish malakalarini oshiradi.

Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati:

1. Г.А.Гальперин, Многомерный куб, Москва 2015 г.
2. N.D.Dodajonov, Yunusmetov R, Abdullaev A. . Geometriya. 2-qism, Toshkent.«O'qituvchi», 1996 y.
3. Понарин Я. П. Преобразования пространства. — Киров: Вятский госпедуниверситет, 2000.
4. Ben-Tal A., Nemirovski A., Roos C. Robust solutions to uncertain quadratic and conic-quadratic problems // SIAM, J. Optim. 2002. 13. 535–560.